

1. Funciones elementales - Problemas

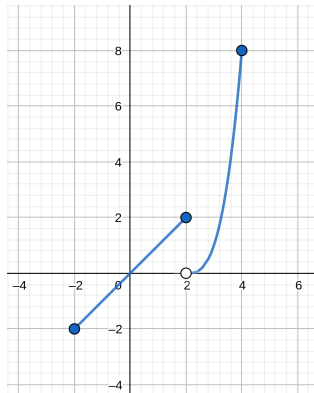
Un ejercicio con el símbolo ★ está considerado como más difícil.

1.1. Funciones

Ejercicio 1 Sea $f(x) = x + \sqrt{4-x} + x^2$ y $g(u) = u + \sqrt{4-u} + u^2$. ¿Es verdad que $f = g$?

Ejercicio 2 Sean $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ y $g(x) = x$. ¿Es verdad que $f = g$?

Ejercicio 3 Sea f la función cuya gráfica es la siguiente:



¿Cuál es el dominio y el rango de f ?

Ejercicio 4 Indica el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

(2) $f(x) = \sqrt{x+1}$

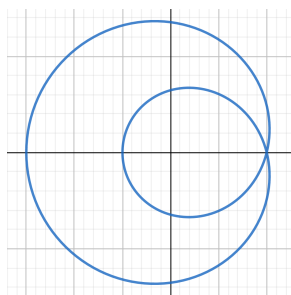
(3) $f(x) = \frac{1}{x}$

(4) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Ejercicio 5 Calcula el dominio de la siguiente función.

$$q(y) = \frac{|y+1|}{(y-1)^2}$$

Ejercicio 6 Considera la siguiente gráfica:



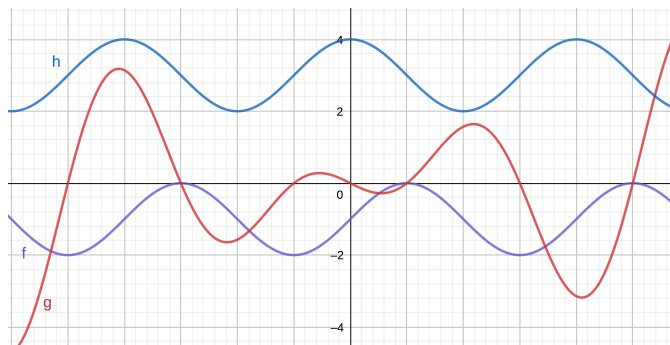
¿Es esta la gráfica de una función y por qué?

Ejercicio 7 Dada la siguiente fórmula, determina si es inyectiva.

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

1.2. Propiedades

Ejercicio 8 Sean f , g y h las funciones cuyas gráficas son las siguientes:



Para cada una, determina si la función es par, impar o ninguna de las dos.

Ejercicio 9 Determina si la función f es par, impar o ninguna de las dos.

(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(2) $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$

(3) $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

(4) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Ejercicio 10 Dada $f(x) = \sqrt{3-x}$ y $g(x) = \sqrt{x^2-1}$. Calcula $f+g$, $f-g$, fg , f/g e indica sus dominios.

Ejercicio 11 Calcula las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ y sus dominios para los siguientes casos:

(1) $f(x) = x^3 - 2$, $g(x) = 1 - 4x$

(2) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2 + 1$

(3) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \sin(2x)$

Ejercicio 12 Halla $f \circ g \circ h$ donde

(1) $f(x) = |x - 4|$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \sqrt{x}$.

(2) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ejercicio 13 (*) Supón que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función par?

Ejercicio 14 (*) Supón que g es una función impar y que $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función impar?

Ejercicio 15 Sean $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = 4x^3 - 3x$. Demuestra que $f \circ g = g \circ f$.

Ejercicio 16 Halla funciones $f(x)$ y $g(x)$ tal que $f \circ g$ son las funciones abajo.

(1) $F(x) = \cos^2(x)$.

(2) $q(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$.

(3) $u(t) = \frac{\operatorname{tg}(t)}{1+\operatorname{tg}(t)}$.

Ejercicio 17 Calcula una fórmula para la inversa de la siguiente función

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$$

1.3. Funciones más complejas

Ejercicio 18 Calcula el valor exacto de cada expresión.

(1) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$

(2) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

(3) $e^{-\ln(2)}$

(4) $e^{\ln(\ln(e^3))}$

Ejercicio 19 Sea $f(x) = \ln(x - 1) - 1$. Esboza la gráfica de f y calcula lo siguiente:

- El dominio
- El rango
- La raíz de la función

Ejercicio 20 Halla x en las siguientes ecuaciones:

(1) $\ln(x^2 - 1) = 3$

(2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

(3) $\ln(\ln(x)) = 1$

(4) $e^{ax} = Ce^{bx}$ donde $a \neq b$.

Ejercicio 21 Halla las razones trigonométricas exactas del ángulo cuya medida en radianes es:

(1) $\frac{4\pi}{3}$.

(2) -5π .

(3) $\frac{11\pi}{4}$.

i.e., Calcula $\sin$, $\cos$, tg , csc , sec y cot para cada uno de los ángulos anteriores. Expresa la respuesta como fracción (o indica que no está definida si es necesario).

Ejercicio 22 Calcula las razones trigonométricas restantes.

(1) $\cos(x) = -\frac{1}{3}$, donde $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

(2) $\operatorname{csc}(\theta) = -\frac{4}{3}$, donde $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

Ejercicio 23 Demuestra que $\sin^2(x) - \sin^2(y) = \sin(x + y)\sin(x - y)$.

Ejercicio 24 Demuestra que $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}$.

Ejercicio 25 Calcula el valor exacto de cada expresión.

(1) $\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3})$

(2) $\arctan(-1)$

(3) $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(5) $\arcsin(\sin(5\pi/4))$

(6) $\cos\left(2\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$